குறியீட்டு அளவையியல் - ஓர் அறிமுகம்

சோ. கிருஷ்ணராஜா

1. முன்னுரை:

நியாயித்தலின் முறைகளையும், தத்துவங்களையும் பற்றி ஆராய்கின்ற விஞ்ஞானமே அளவையியல். வலிதான வலிதற்ற நியாயித்தல் முறைகளிற் கிடையிலான வேறுபாடுகளை ஆராய்வதற்கென சிறப்பான வழிமுறைகள் அளவையியலாளர்களினால் விருத்தி செய்யப்பட்டுள்ளன. பாரம்பரியமாக அளவையியலாளர்கள் நியாயித்தல் பற்றிய தமது ஆய்வுகளை இயற்கை மொழியினூடாகவே நடத்தினராதலினால், கணிதம் போன்ற பிற விஞ்ஞானத் துறைகளுடன் ஒப்பிடுகையில் அளவையியல் மிகவும் பின்தங்கிய நிலையிலேயே காணப்பட்டது. இயற்கை மொழியில் வாதங்கள் அமைக்கப்படும் பொழுது அங்கு பயன்படுத்தப்படும் மொழிவழக்கு, சொற்கள் என்பன வாதங்களைத் தெளிவற்றும், திரித்தும் தவறான முடிவுகளுக்கு இட்டுச் செல்லலாம். மொழியினால் எழுகின்ற இயல்பான இடர்பாடுகளைத் தவிர்த்துக் கொள்வதற்காகத் தற்கால அளவையியலாளர்கள் ஒரு செயற்கையான மொழியை உருவாக்கியுள்ளனர். இது மாறிகள், மாறிலிகள் என்ற இரு அம்சங்களைக் கொண்டதாகும். மாறிகள், மாறிலிகள் என்பனவற்றின் துணை கொண்டு வாதங்கள் குறியீட்டில் அமைக்கப்படுகின்றன. மாறிகளென்றால் என்ன? மாறிலிகள் மாறிகளுடன் எவ்வாறு தொடர்புடையன? இதனை பின்வரும் கணிதச் சூத்திரத்தின்மூலம் விளக்கலாம்.

$$(X + Y)^2 = X^2 + 2XY + Y^2$$

X என்பதற்கு 2 உம், Y என்பதற்கு 3 உம் பெறுமானங்களாக கொடுப்போம். இதன் மூலம் நாம் $(2+3)^2 = 2^2+2\times 2\times 3+3^2$ என்பதைப் பெறலாம். அதாவது $25 = 25$ என்பதைப் பெறலாம்;

X க்கும் Y க்கும் முறையே 2, 3 எனத் தரப்பட்ட பெறுமானத்திற்குப் பதிலாக நாம் வேறு பெறுமானங்களைத் தரலாம். அவ்வாறு தரின் விடை $25 = 25$ ஆக இராது வேறாக இருக்கும். X, Y என்பன கணித மாறிகள் எனப்படும். $+, =, \times$ என்பன மாறிலிகள் ஆகும். இதைப் போலவே அளவையியலில் பயன்படுத்தப்படுகின்ற P, Q, R போன்ற எழுத்துக்கள் அளவையியல் மாறிகள் எனவும், $\sim$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\vee$, $\leftrightarrow$ என்பன அளவையியல் மாறிலிகள் எனவும் அழைக்கப்படும்.

1.2. எடுப்புக்கள்:

நியாயித்தல் முறைகளைப்பற்றி ஆராய்கின்ற விஞ்ஞானமே அளவையியல் என பகுதி 1 இல் கூறினோம். நியாயித்தல் வாதவடிவங்களாகவே அளவையியலில் தரப்படுகின்றது. எடுப்புக்கள் எனப்படுவது வாதவடிவங்களின் பகுதிகளாகும்.

1.3. எடுப்புக்களின் வகைபீடு:

எடுப்புக்கள் எளிய எடுப்புக்கள், கூட்டெடுப்புக்கள் என இரு வகைப் படும். எளிய எடுப்புக்களைத் தன் பகுதிகளாகக் கொண்டிருப்பது கூட் டெடுப்பாகும். தனி எடுப்புக்களாகப் பிரிக்கப்பட முடியாத எடுப்புக்கள் எளிய எடுப்புக்கள் எனப்படும்.

நான் படம் பார்க்கப் போவேன்.

நான் நண்பர்களைச் சந்திப்பேன்.

மேற்கூறிய இரண்டு எடுப்புக்களும் எளிய எடுப்புக்களாகும். இவற்றை இணைப்பதன்மூலம் நாம் பின்வரும் கூட்டெடுப்பைப் பெறலாம்.

நான் படம் பார்க்கப் போவேனுயின் நண்பர்களைச் சந்திப்பேன்.

கூட்டெடுப்புக்கள்:
(அ) விதி எடுப்புக்கள்
(ஆ) மறை எடுப்புக்கள்
(இ) இணைப்-பெடுப்புக்கள்
(ஈ) உறழ்வு எடுப்புக்கள்
(உ) உட்கிடை எடுப்புக்கள்
(ஊ) இருபால் நிபந்தனை எடுப்புக்கள்

எனப் பாகுபடுத்தப்படும்.

இராமு ரகுவிலும் பார்க்க உயரமானவன் – ஒரு விதி எடுப்பு
இராமு ரகுவிலும் பார்க்க உயரமானவன் அல்ல – மறை எடுப்பு

"அத்துடன்" என்ற தொடர்பினடிப்படையில் உருவாக்கப்படுவது இணைப்பெடுப்பாகும்.

உ-ம்: மழை பெய்கிறது அத்துடன் குளிராகவும் இருக்கிறது.

"அல்லது", "ஒன்றில் அல்லது" போன்ற உறழ்வுச் சொற்கள் பயன் படுத்தப்பட்டுவரின் அவ்வெடுப்பு உறழ்வெடுப்பாகும்.

உ-ம்: அவன் கண்டிக்கு அல்லது கொழும்புக்குச் செல்வான்.

"ஆயின்" என்ற தொடர்பினடிப்படையில் உட்கிடை எடுப்புக்கள் உரு வாக்கப்படும். இவை நிபந்தனை எடுப்புக்கள் எனவும் அழைக்கப்படும்.

உ-ம்: அவள் நஞ்சு உண்பாளேயாயின் இறப்பாள்.

"ஆயினே ஆயின்" என்ற தொடர்பினடிப்படையில் உருவாக்கப்படும் எடுப் புக்கள் இருபால் நிபந்தனை எடுப்புக்கள் எனப்படும்.

உ-ம்: அவன் படத்திற்குச் செல்வானுயினே ஆயின் நானும் படத் திற்குப் போவேன்.

1.4. எளிய, கூட்டெடுப்புக்களைக் குறியீட்டிலமைத்தல்:

எளிய, கூட்டு எடுப்புக்களை இருவகையில் குறியீட்டில் அமைக்கலாம்:

(அ) எடுப்பின் உள்ளமைப்பைக் கவனத்திற் கொண்டு குறியீடமைத்தல் (இது பயனிலைத் தர்க்கத்திற்குரியது.)

(ஆ) எடுப்பின் உள்ளமைப்பைக் கவனத்திற்கொடுக்காது எடுப்புக்களைக் குறியீட்டில் அமைத்தல். (இது எடுப்பளவையியல் எனப்படும்.)

எடுப்புக்களைக் குறியீட்டில் அமைக்கும்பொழுது கவனிக்கப்பட வேண்டிய அம்சங்கள் பின்வருமாறு :

(அ) எடுப்பு வடிவத்திற்கும், எடுப்பிற்குமிடையிலான வேறுபாட்டைக் கவனித்துக் கொள்ளுதல்.

(ஆ) கூட்டெடுப்பின் பகுதிகளாயமையும் எளிய எடுப்புக்களை இணைக்கும் இணைப்புச் சொற்கள்.

பின்வரும் உதாரணங்களைக் கவனிக்கவும் :

(அ) பாலன் உயரமானவனுயின் அவன் இராணுவத்தில் சேரத் தகுதியுள்ளவன்.

(ஆ) மழை பெய்கிறது அத்துடன் நிலம் ஈரமாயிருக்கிறது.

(இ) பாலன் செல்வந்தன் அல்லது உயரமானவன்.

(ஈ) அவள் கணவனை இழந்தவளாயினே ஆயின் அவள் விதவையாவாள்

(உ) இனிப்பு பற்களுக்குக் கெடுதியானது அல்ல.

பின்வரும் குறியீடுகளைப் பயன்படுத்துவோம்.

(அ) எளிய எடுப்புக்களுக்கு A, B, C, ... Z என்ற எழுத்துக்களைப் பயன்படுத்துவோம். இவை எடுப்பு மாறிகள் எனப்படும்.

(ஆ) கூட்டெடுப்பின் பகுதிகளான எளிய எடுப்புக்களை இணைக்கும் சொற்களுக்கு $\sim$, $\rightarrow$, $\vee$, $\leftrightarrow$, $\wedge$ என்ற குறியீடுகளைப் பயன்படுத்துவோம்.

மாறிலிகளின் கருத்து.

(அ) "$\sim$" என்பது மறுப்பு மாறிலி. அன்று, அல்ல, உண்மையன்று என்ற கருத்திற்குரியது.

(ஆ) "$\rightarrow$" என்பது நிபந்தனை மாறிலி. ஆயின், எனின் என்ற இணைப்பைச் சுட்டும்.

(இ) "$\vee$" உறழ்வு மாறிலி. அல்லது என்ற இணைப்பைச் சுட்டும்.

(ஈ) "$\leftrightarrow$" இருபால் நிபந்தனை மாறிலி. ஆயினே ஆயின் என்ற இணைப்பைச் சுட்டும்.

(உ) "$\wedge$" இணைப்பு மாறிலி. அத்துடன் என்ற இணைப்பைச் சுட்டும்.

தரப்பட்ட குறியீடுகளின் அடிப்படையில் ஏலவே தரப்பட்ட உதாரணங்களைக் குறியீட்டில் அமைப்போம்.

(அ)	பாலன் உயரமானவன்	=	B
	பாலன் இராணுவத்தில் சேரத் தகுதியுடையவன்	=	E
	ஆயின்	=	$\rightarrow$
	B ஆயின் E	=	$(B \rightarrow E)$
(ஆ)	மழை பெய்கிறது	=	R
	நிலம் ஈரமாயிருக்கிறது	=	W
	அத்துடன்	=	$\wedge$
	R அத்துடன் W	=	$(R \wedge W)$
(இ)	பாலன் செல்வந்தன்	=	R
	பாலன் உயரமானவன்	=	T
	அல்லது	=	$\vee$
	R அல்லது T	=	$(R \vee T)$
(ஈ)	அவள் விதவை	=	W
	அவள் கணவனை இழந்தவள்	=	H
	ஆயினே ஆயின்	=	$\leftrightarrow$
	W ஆயினே ஆயின் H	=	$(W \leftrightarrow H)$
(உ)	இனிப்பு பற்களுக்குக் கெடுதியானது	=	S
	அல்ல	=	$\sim$
	S அல்ல	=	$\sim S$

1.5. உண்மைப் பெறுமானமும் உண்மை அட்டவணையும்:

எடுப்பளவையியலில் பயன்படுத்தப்படும் மாறிலிகளின் கருத்து அவற்றின் உண்மைப் பெறுமானத்தில் தங்கியுள்ளது. அதாவது உண்மைப் பெறுமானத்தை அடிப்படையாகக்கொண்டே குறியீடுகள் வரையறுக்கப் படுகின்றன. ஒரு எளிய எடுப்பின் உண்மைப் பெறுமானம் இரண்டாகும்; கூட்டெடுப்புக்களின் உண்மைப் பெறுமானம் அவ்வெடுப்பில் இடம்பெறும் எளிய எடுப்புக்களின் எண்ணிக்கையினால் தீர்மானிக்கப்படும்.

பின்வரும் உதாரணத்தைக் கவனிக்குக.

(அ) மழை பெய்தது.

மழை பெய்தது.
T
F

(ஆ) மழை பெய்தது $\wedge$ காற்று வீசியது

மழை பெய்தது	$\wedge$	காற்று வீசியது
T	T	T
T	F	F
F	F	T
F	F	F

கூட்டெடுப்பில் பயன்படுத்தப்படும் மாறிலிகள் அனைத்தும் தமக்கென்ற உண்மைப் பெறுமானத்தைக் கொண்டுள்ளது:

உண்மையட்டவணை.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	T	F
F	F	F	F	T	T

(இ) மறுப்பு மாறிலியின் உண்மையட்டவணை பின்வருமாறு

p	$\sim p$
T	F
F	T

எல்லாக் கூட்டெடுப்புக்களினதும் மறுப்பு தமக்கென்ற பிறிதான உண்மைப் பெறுமானத்தைக் கொண்டுள்ளன. பின்வரும் அட்டவணையைக் கவனிக்குக:

$(p \wedge q)$	$\sim (p \wedge q)$
T	F
F	T
F	T
F	T

$(p \vee q)$	$\sim (p \vee q)$
T	F
T	F
T	F
F	T

$(p \rightarrow q)$	$\sim (p \rightarrow q)$
T	F
F	T
T	F
T	F

$(p \leftrightarrow q)$	$\sim (p \leftrightarrow q)$
T	F
F	T
F	T
T	F

1.6. குறியீட்டளவையியலாளர்களினால் பயன்படுத்தப்படும் பதிலீடான மாறிகள்

$\sim p$	$=$	$\bar{}p$	$\urcorner p$,	$-p$,	Np
$p \wedge q$	$=$	pq,	$p \& q$,	$p \cdot q$,	Kpq
$p \to q$	$=$	$p \supset q$,	Cpq		
$p \vee q$	$=$	Apq			
$p \leftrightarrow q$	$=$	$p \equiv q$,	Epq		

1.7. நற்சூத்திரங்களும் அடைப்புக் குறிகளும் :

குறியீட்டளவையியல் ஒரு நியம உய்தறி முறையாகும். இது ஏனைய நியம உய்தறி முறைகளிலிருந்து வேறுபட்டது. குறியீடுகள் தருக்கச்சொற்றொடரியல் விதிகளை அடிப்படையாகக் கொண்டது. தருக்க சொற்றொடரியல் விதிகள் இலக்கண விதிகளை ஒத்தது. இலக்கண விதிகளைப் பேணுவதன்மூலமே செம்மையான வாக்கியங்களை அமைக்கலாம். அதுபோலவே தருக்க சொற்றொடரியல் விதிகளைப் பேணி அமைக்கப்படுவது நற்சூத்திரம் எனப்படும். நற்சூத்திரங்கள் கருத்துடைய வாக்கியங்களை ஒத்தது. மாறிகளும் மாறிலிகளும் முறையாக அமைக்கப்படும் குறியீட்டமைப்பே நற்சூத்திரமாகும். இதனை Wff எனச் சுருக்கமாகக் குறிப்பிடலாம். மாறிகளும் மாறிலிகளும் செம்மையாக அமைக்கப்படாதுவிடின் அது நற்சூத்திரமல்ல. இது iff எனச் சுருக்கமாகக் குறிக்கப்படும். உதாரணமாக $p \wedge q \to r$ என்பது நற்சூத்திரமல்ல. ஆனால் $p \wedge (q \to r)$ என்றோ அல்லது $(p \wedge q) \to r$ என்றோ அமைக்கப்படின் அது நற்சூத்திரமாகும்.

நற்சூத்திரங்களை நற்சூத்திரங்களல்லாதனவற்றிலிருந்து பிரித்தறிவதற்கு மீளவோடல் முறை வரைவிலக்கணம் பயன்படுத்தப்படுகிறது. நற்சூத்திரங்களைக் கண்டறிவதற்கான மீளவோடல் வரைவிலக்கண முறையானது பின்வருமாறு :

(அ) ஒரு மாறிலி "p" நற்சூத்திரமாகும். Wff

(ஆ) p ஒரு நற்சூத்திரமாயின் $\sim p$ உம் ஒரு நற்சூத்திரமாகும்.

(இ) p ஒரு நற்சூத்திரமாயும் அத்துடன் q ஒரு நற்சூத்திரமாயின் $(p \vee q)$ உம் நற்சூத்திரமாகும்.

மேற்கூறிய விதிகளைப் பேணாத எந்தவொரு சூத்திரமும் நற்சூத்திரமாகாது.

$p \sim$, $\vee pq$, $qp \vee$, $\sim p \wedge q \sim \vee p$ என்பன நற்சூத்திரங்கள் அல்ல.

மாறிகளையும், மாறிலிகளையும் செம்மையாக அமைப்பதற்குப் பயன்படுவன அடைப்புக் குறிகளாகும். அடைப்புக் குறிகள் மாறிலிகளைப் போன்ற முக்கியத்துவமுடையனவேயாயினும், அவை உண்மைப் பெறுமானத்தைக் கொண்டவையல்ல. அடைப்புக் குறிகள் நிறுத்தக் குறியீடுகள் போன்று தொழிற்படுகின்றன.

1.8. பிற குறியீட்டளவையியல் முறைகள் :

Sheffere's Stroke system என்பது பிறிதொரு குறியீட்டளவையியல் முறையாகும். இங்கு பயன்படுத்தப்படும் மாறிலி "|" கீறல் வரை எனப் படும். கீறல் வரை குறியீட்டின் உண்மைப் பெறுமானம் பின்வருமாறு

p	q	p | q
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

கீறல் வரையின் உண்மைப் பெறுமானத்தை அடிப்படையாகக்கொண்டு ஏனைய மாறிலிகளைப் பின்வருமாறு வரையறுக்கலாம்.

(அ) $\sim p \;=\; df \;\; p \mid p$
(ஆ) $q \wedge q \;=\; df \;\; (p \mid p) \mid (p \mid q)$
(இ) $p \vee q \;=\; df \;\; (p \mid p) \mid (q \mid q)$
(ஈ) $p \rightarrow q \;=\; df \;\; p \mid (q \mid q)$

மேற்குறித்த சமன்பாட்டை அவற்றிற்குரிய உண்மைப் பெறுமானத்தி னடிப்படையில் நிறுவலாம்.

(அ)

~p	p | p
F	T F T
T	F T F

(ஆ)

p∧q	(p | q) | (p | q)
T	F T F
F	T F T
F	T F T
F	T F T

(இ)

p∨q	(p | p) | (p | q)
T	F T F
T	F T T
T	T T F
F	T F T

(ஈ)

p → q	p | (q | q)
T	T F
F	F T
T	T F
T	T T

உதாரணம் :

(p $\leftrightarrow$ q என்ற வாதத்தை பின்வருமாறு கீறல் வரை முறைமூலம் குறியீடாக்கலாம்.

$p \leftrightarrow q$
$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
$\{p \mid (q \mid q) \wedge q \mid (p \mid p)\}$
$$\Big[\{p \mid (q \mid q)\} \mid \{q \mid (p \mid p)\}\Big] \mid \Big[\{p \mid (q \mid q)\} \mid \{q \mid (p \mid p)\}\Big]$$

கூரச்சுக்குறி $\downarrow$ என்ற மாறிலியும் சில அளவையாளர்களினால் பயன் படுத்தப்படும் ஒரு குறியீட்டு முறையாகும். இதன் உண்மைப் பெறு மானம் பின்வருமாறு :

p	$\downarrow$	q
T	F	T
T	F	F
F	F	T
F	T	F

கூரச்சுக் குறியினைப் பயன்படுத்தும் முறையில் $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ என்பவற்றுக்கான பெறுமானங்கள் வருமாறு:

(அ) $\sim p = \text{df } p \downarrow q$
(ஆ) $p \wedge q = \text{df } (p \downarrow q) \downarrow (q \downarrow p)$
(இ) $p \vee q = \text{df } (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$
(ஈ) $p \rightarrow q = \text{df } \{(p \downarrow q) \downarrow q\} \downarrow \{(p \downarrow p) \downarrow q\}$

$p \rightarrow (p \vee q)$ என்ற வாதத்தைக் கூரச்சுக் குறியினைப் பயன்படுத்திப் பின்வருமாறு அமைக்கலாம்.

$p \rightarrow (p \vee q)$
$p \rightarrow \{(p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)\}$
$$\Big[(p \downarrow p) \downarrow \{(p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)\}\Big] \downarrow \Big[(p \downarrow p) \downarrow \{(p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)\}\Big]$$

மேலே தரப்பட்ட இரு முறைகளும் தனியொரு மாறியின் துணை கொண்டு அமைக்கப்படுவதனால் குறியீட்டு முறை மிக நீளமானதாகவும் கையாளுவதற்கு இலகுவானதல்லாதாகவும் காணப்படுகின்றன.

2. எடுப்பளவையியலில் வாதங்களின் வாய்ப்பைத் துணியும் முறைகள்

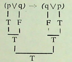
குறியீட்டு மொழியில் அமைக்கப்படும் கூட்டெடுப்பின் உண்மைப் பெறுமானத்தைத் தீர்மானிப்பதன்மூலம் வாதங்களின் வாய்ப்பினைத்

துணியலாம். கூட்டெடுப்பின் உண்மைப் பெறுமானம் அவ்வெடுப்பின் பகுதிகளது உண்மைப் பெறுமானத்திலிருந்து பெறப்படும். அதாவது எடுகூற்றுக்களிலிருந்து நியமமாய் ஒரு முடிவு பெறப்படின் அவ்வாதம் வாய்ப்பானதாகும்.

பின்வரும் உதாரணத்தைக் கவனிக்கவும் (1)

$$(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$$

தரப்பட்ட குறியீட்டு வாக்கியத்தில் வருகின்ற p உண்மை எனவும் q பொய் எனவும் அனுமானிக்கவும். இவ்வானுமானத்தினடிப்படையில் மேலே தரப்பட்ட குறியீட்டு வாக்கியத்தின் உண்மைப் பெறுமானம் பின் வரும் முறையில் காணப்படலாம்.

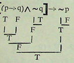


p உண்மையாகவும் q பொய்யாகவும் இருக்கும்பொழுது $(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$ என்பது உண்மையாகும்.

உதாரணம் (2)

$$[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p$$

p பொய் எனவும் q உண்மை எனவும் அனுமானிக்கவும்.



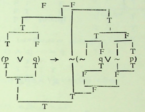
உதாரணம் (3)

$$(p \vee q) \rightarrow \sim(\sim q \vee \sim p)$$

இங்கு இரண்டு பெறுமானங்கள் தரப்படுகின்றன.

முதலாவது p யும் q வும் உண்மை
இரண்டாவது p உண்மை ஆனல் q பொய்

மாறிகளுக்கு இரண்டு வகையான பெறுமானங்கள் தரப்படும்பொழுது உண்மைப் பெறுமானத்தைப் பின்வரும் முறையில் பெறலாம்.



p யும் q வும் உண்மை என அனுமானித்தால் மேலே தரப்பட்ட குறியீட்டு வாதம் வலிதானது. p உண்மை எனவும் q பொய் எனவும் தரப்படின் மேற்படி வாதம் வலிதற்றது. அதேபோல p, q என்ற இரண்டும் பொய்யாயிருத்தல், p பொய்யாகவும் q உண்மையாகவுமிருத்தல் என்ற பெறுமானங்களைக் கொடுத்துத் தரப்பட்ட வாதத்தின் வாய்ப்பைப் பரிசோதிக்கலாம்.

2.1. உண்மையட்டவணை முறை அல்லது நேரடி முறை

தரப்பட்டதொரு குறியீட்டு வாதம் கூறியது கூறவா அல்லவா எனத் தீர்மானிப்பதற்கு உண்மையட்டவணை முறை மிகவும் பயனுடையது. எடுப்பு வடிவத்தின் எல்லாப் பிரதியீடுகளிலும் உண்மை என்பது பெறப்பட்டால், அவ்வாறு பெறப்பட்ட குறியீட்டு வாதமானது வலிதானதாயிருக்கும். பின்வரும் உதாரணத்தைக் கவனிக்கவும்.

$$\left[(p \to q) \wedge p\right] \to q$$

முதலில் தரப்பட்ட வாதத்தில் வருகின்ற மாறிகளைக் கணித்து, அவற்றிற்கேற்ற வகையில் சாத்தியமாகக்கூடிய உண்மைப் பெறுமானத்தைக் கொடுத்தல் வேண்டும்.

தரப்பட்ட வாதம் இரு மாறிகளைக் கொண்டிருப்பதால் அவற்றிற்குரிய உண்மைப் பெறுமானத்தின் சாத்தியப்பாடு நான்காகும். தரப்பட்ட வாதம் மூன்று மாறிகளைக் கொண்டிருப்பின் சாத்தியமாகக்கூடிய உண்மைப் பெறுமானம் எட்டாகும். இவ்வாறு மாறிகளின் தொகை அதிகரிக்க அதிகரிக்க சாத்தியமாகக்கூடிய உண்மைப் பெறுமானமும் அதிகரித்துச் செல்லும்.

உதாரணம் (1)

p	[(p	→ q)	∧	p]	→	q	
T	T	T	T	T	T	T	1,2,3,4/0
T	F	F	F	T	T	F	
F	T	T	F	F	T	T	
F	F	T	F	F	T	F	
					=		

வாதம் வலிதானது / கூறியது கூறலாகும்

உதாரணம் (2)

p	q	V	[(p→q)	∧	(q→r)]	→	(p→r)	
T	T	T	T	T	T	T	T	
T	T	F	T	F	F	T	F	
T	F	T	F	F	T	T	T	
T	F	F	F	F	T	T	F	
F	T	T	T	T	T	T	T	1,2,3,4,5,6,7,8/0
F	T	F	T	F	F	T	T	
F	F	T	T	T	T	T	T	
F	F	F	T	T	T	T	T	
						=		

வாதம் வலிதானது / கூறியது கூறலாகும்

2.2. கூறியது கூறல், எதிர்மறை, பராதீனமான

தரப்பட்ட குறியீட்டு வாதத்தின் இறுதி மாறிலியின் பெறுமானம் எல்லா நிலைகளிலும் T என வரின் அவ்வாதம் கூறியது கூறலாகும். மாறாக எல்லா நிலைகளிலும் F என வரின் தரப்பட்ட வாதம் எதிர்மறையானது என்பது பெறப்படும். T யும் F உம் கலந்து வரின் தரப்பட்ட வாதம் பராதீனமானது அல்லது நிபந்தனையானது என்பது பெறப்படும்.

கூறியது கூறலான குறியீட்டு வாதம் மறுக்கப்பட்டால் அது எதிர் மறை இயல்பையும் எதிர்மறையான குறியீட்டு வாதம் மறுக்கப்படின் கூறியது கூறல் இயல்பையும் பெறும்.

உதாரணம் (1) *எதிர்மறை*

$$\begin{array}{ccccc} \sim & (p \vee q) & \wedge & \sim & (\sim p \wedge \sim q) \\ F & T & F & T & F \\ F & T & F & T & F \\ F & T & F & T & F \\ T & F & F & F & T \\ & & = & & \end{array} \qquad 0/1,2,3,4$$

உதாரணம் (2) *பராதீனமான அல்லது நிபந்தனை*

$$\begin{array}{ccccc} [(p \vee q) & \wedge & q] & \rightarrow & \sim q \\ T & T & T & F & F \\ T & T & T & T & T \\ T & F & F & T & F \\ T & F & F & T & T \\ & & & = & \end{array} \qquad 2,3,4/_1,$$

உதாரணம் (3) *கூறியது கூறல்*

$$\begin{array}{ccc} p & \rightarrow & (p \vee q) \\ T & T & T \\ T & T & T \\ F & T & T \\ F & T & F \end{array} \qquad 1,2,3,4,/_0.$$

உதாரணம் (4) *கூறியது கூறல் மறுக்கப்படல்*

$$\begin{array}{cc} \sim & [p \rightarrow (p \vee q)] \\ F & T \\ F & T \\ F & T \\ F & T \end{array} \qquad 0/1,2,3,4,$$

உதாரணம் (5) *எதிர்மறை மறுக்கப்படல்*

$$\begin{array}{cc} \sim & [\sim (p \vee q) \wedge \sim (\sim p \wedge \sim q)] \\ T & F \\ T & F \\ T & F \\ T & F \end{array}$$

2.3. நேரல்முறை

உண்மை அட்டவணைக்குப் பதிலாகக் குறுகிய முறையில் குறியீட்டு வாதங்களைப் பரிசோதிக்கும் ஒரு முறை நேரல் முறை எனப்படும். நேரல் முறையில் தரப்பட்ட குறியீட்டு வாதத்தின் இறுதி இணைப்பிற்குரிய பெறுமானம் F என அனுமானிக்கப்பட்டு, அதற்கேற்ற வகையில் உரிய பெறுமானங்கள் கொடுக்கப்படுகிறது: அவ்வாறு பெறுமானங்கள் கொடுபடுமிடத்து இயைபின்மை ஏற்படுமாயின் தரப்பட்ட வாதம் வலிதானது. பின்வரும் உதாரணத்தைக் கவனிக்கவும்.

உதாரணம் (1)

$$(p \wedge q) \rightarrow p$$
$$\begin{array}{ccc} T & F & F \end{array}$$

முதலில் தரப்பட்ட வாதத்தின் இறுதி இணைப்பான → என்பதை F என அனுமானித்ததன்மூலம் (p ∧ q) என்பது T எனவும், P என்பது F எனவும் பெறப்பட்டது. இரண்டாவது (p ∧ q) என்பது T எனப் பெறப்பட்டது. எனவே அதிலடங்கிய p யும் q வும் T ஆகும்.

$$(p \wedge q) \rightarrow p$$
$$\begin{array}{ccccc} T & T & T & F & F \end{array}$$

மேலேயுள்ள சூத்திரத்தில் ஓரிடத்தில் p என்ற மாறி T ஆகவும், பிறிதோரிடத்தில் F ஆகவும் வருவதால் ஏற்படும் இயைபின்மையினால் அவ்வாதம் வலிதானதென்பது பெறப்படும்.

உதாரணம் (2)

$$\left[(p \vee q) \wedge \sim q\right] \rightarrow p$$

(அ)

$$\left[(p \vee q) \wedge \sim q\right] \rightarrow p$$
$$\begin{array}{ccc} T & F & F \end{array}$$

(ஆ)

$$\left[(p \vee q) \wedge \sim q\right] \rightarrow p$$
$$\begin{array}{ccccc} T & T & T & F & F \end{array}$$

(இ)

$$\left[(p \vee q) \wedge \sim q\right] \rightarrow p$$
$$\begin{array}{cccccccc} F & T & F & T & T & F & F & F \end{array}$$

மேற்படி உதாரணத்தின் இறுதி இணைப்பை F என எடுத்தபொழுது அவ்வாதத்திலடங்கிய (p ∨ q) என்பதின் உண்மைப் பெறுமானத்தில் இயைபின்மை ஏற்படுகிறது. ஆகவே தரப்பட்ட வாதம் வலிதானதாகும்.

உதாரணம் (3)

$$\left[(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)\right] \vee (p \vee q)$$
$$\begin{array}{cccccccccc} F & F & F & F & F & T & F & F & F & F \end{array}$$

இறுதி இணைப்பான ∨ என்பதை F என எடுத்தபொழுது (p → q) என்பதன் உண்மைப் பெறுமானத்தில் எழுகின்ற இயைபின்மையால் மேற்படி வாதம் வலிதானதென்பது பெறப்படும்.

உதாரணம் (4)

$$\left[(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)\right] \rightarrow (q \rightarrow r)$$
$$\begin{array}{ccccccccc} F & T & F & T & F & T & F & F & T\,F\,F \end{array}$$

மேலே தரப்பட்ட வாதத்தின் உண்மைப் பெறுமானத்தில் இவை பின்மை ஏற்படாததால் அவ்வாதம் வலிதானதல்ல.

உதாரணம் (5)

$(p \rightarrow q) \wedge (\sim p \rightarrow \sim q)$

ஐந்தாவது உதாரணத்தில் பிரதான இணைப்பு F என வருதற்குரிய சாத்தியப்பாடு பின்வரும் மூன்று சந்தர்ப்பங்களில் எழலாம்.

முதலாவது சந்தர்ப்பம்

$(p \rightarrow q) \wedge (\sim p \rightarrow \sim q)$
T F F

இரண்டாவது சந்தர்ப்பம்

$(p \rightarrow q) \wedge (\sim p \rightarrow \sim q)$
F F T

மூன்றாவது சந்தர்ப்பம்

$(p \rightarrow q) \wedge (\sim p \rightarrow \sim q)$
F F F

இத்தகைய சந்தர்ப்பங்களில் பின்வரும் முறையில் வாதத்தில் வாய்ப்பைப் பரிசோதித்தல் வேண்டும்.

(அ) தரப்பட்ட வாதத்திற்கு ஒன்றிற்கு மேற்பட்ட உண்மைப் பெறுமான சந்தர்ப்பங்கள் இருப்பின், அவற்றில் ஏதாவது ஒன்றைத் தெரியவும்.

(ஆ) அவ்வாறு தெரியப்பட்ட முறையில் தரப்பட்ட சூத்திரம் வலிதற்ற தாய்க் காணப்படின் ஏனைய சந்தர்ப்பங்களைக் கவனத்திற்கெடுக்கத் தேவையில்லை.

(இ) மேலெழுந்தவாரியாகத் தெரிவுசெய்யப்பட்ட சந்தர்ப்பத்தில் தரப்பட்ட வாதம் வலிதானதென்ற பண்பைச் சுட்டிநிற்பின், அதன் ஏனைய சந்தர்ப்பங்களையும் ஆராய்தல் வேண்டும். ஏனெனில் வலிதான வாதம் அதற்குரிய எல்லாச் சந்தர்ப்பங்களிலும் வலிதானதாக (உண்மையானதாக) இருக்கும்.

2.4. உண்மை அட்டவணையின் உதவியுடன் வாதங்களின் வாய்ப்பைத் துணிதல்

வாதங்களைக் குறியீட்டு மொழியில் அமைத்தலும், அவற்றின் வாய்ப்பைத் துணிதலும் குறியீட்டளவையியலின் முக்கிய நோக்கங்களிலொன்று. குறியீட்டளவையியல் தூய வடிவங்களைப்பற்றிய விஞ்ஞானமாதலினல், அது வாய்ப்பான வடிவங்கள்பற்றி ஆராய்கிறதெனலாம். பின்வரும் உதாரணத்தைக் கவனிக்கவும்.

மாலா விரிவுரைக்குச் செல்வாள் அல்லது நூல்நிலையம் செல்வாள். அவள் விரிவுரைக்குச் செல்லவில்லை. ஆகவே மாலா நூல்நிலையம் சென்றிருத்தல் வேண்டும்.

குறியீட்டுத் திட்டம்

மாலா விரிவுரைக்குச் செல்லுதல் — p
மாலா நூல்நிலையம் செல்லுதல் — q

மேற்கூறிய குறியீட்டுத் திட்டத்தினடிப்படையில் தரப்பட்ட வாதம் பின்வரும் வடிவத்தைப் பெறும்.

உதாரணம் (1)

$p \vee q$ எடுகூற்று 1
$\sim p$ எடுகூற்று 2
q முடிவு

உண்மை அட்டவணை முறைப்படி இவ்வாதம் பின்வருமாறு பரிசோதிக்கப்படும்.

p	q	$[(p \vee q)$	$\wedge$	$\sim p]$	$\rightarrow q$
T	T	T	F	F T	T
T	F	T	F	F T	F
F	T	T	T	T T	T
F	F	F	F	T T	F

1,2,3,4/0.

இவ்வாதம் வலிதானது

உதாரணம் (2)

மாலா கடின உழைப்பாளி என்பதும் தேவி கடின உழைப்பாளியல்ல என்பதும் உண்மையல்ல. மாலா கடின உழைப்பாளி அல்ல என்பதனால் தேவி கடின உழைப்பாளி என்பது பெறப்படும்.

குறியீட்டுத் திட்டம்

மாலா கடின உழைப்பாளி — p
தேவி கடின உழைப்பாளி — q

$\sim (p \wedge \sim q)$ எடுகூற்று 1
$\sim p$ எடுகூற்று 2
q முடிவு

உண்மை அட்டவணையின் உதவியுடன் தரப்பட்ட வாதத்தைப் பின்வருமாறு பரிசோதிக்கலாம்.

p	q	$[\sim(p \wedge \sim q) \wedge \sim p] \rightarrow q$
T	T	T T F F F F T T
T	F	F T T T F F T F
F	T	T F F F T T T T
F	F	T F F T T T F F

1,2,3/4.

இவ்வாதம் வலிதற்றது.

மேற்கூறிய உதாரணங்களிலிருந்து நாம் பின்வரும் முடிவுகளைப் பெற லாம்.

1. சாதாரண மொழியில் தரப்படும் வாதம் எடுகூற்றுக்களையும் ஒரு முடிபையும் கொண்டிருக்கும்.

2. எடுகூற்றுக்களிலிருந்து முடிவு பெறப்படுவதனால் வாதங்கள் எப்பொழு தும் நிபந்தனை வடிவத்தையே பெற்றிருக்கும்.

3. முடிவு எடுகூற்றுக்களின் இணைப்பிலிருந்தே பெறப்படும்.

இதனைப் பின்வருமாறு எடுத்துக்காட்டலாம்.

$(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \ldots\ldots\ldots Pn) \rightarrow C$

உதாரணம் (3)

எடுகூற்று 1	$\sim (p \vee q)$
எடுகூற்று 2	$\underline{\sim (q \wedge \sim r)}$
முடிவு	$p \rightarrow r$

$(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \ldots \ldots Pn) \rightarrow C$ என்ற சூத்திரத்தின் உதவியுடன் தரப்பட்ட வாதத்தைப் பின்வருமாறு நற்சூத்திரமாக்கலாம்.

$$[(\sim p \vee q) \wedge \sim (q \wedge \sim r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$$

நேரல் முறைப்படியான பரிசோதனை வருமாறு:

$$[(\sim p \vee q) \wedge \sim (q \wedge \sim r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$$
$$\text{F}\quad \text{T T T T}\ \underline{\underline{\text{T F T}}}\quad \text{F}\ \ \text{T F F}$$

உண்மைப் பெறுமானத்தில் இயைபின்மை காணப்படுவதால் மேற்படி வாதம் வலிதானதாகும்.

நிபந்தனை வெளிப்பாடில்லாதும் ஒரு வாதத்தின் அல்லது வாத வடி வத்தின் வாய்ப்பைத் துணியலாம்.

இம்முறையின்படி தரப்பட்ட வாதத்தின் முடிபை F எனவும், எடு கூற்றுக்கள் அனைத்திற்கும் T எனவும் பெறுமானத்தைக் கொடுக்கவும். அதாவது முடிவு பிழையானது எனவும் எடுகூற்றுக்கள் உண்மையானது

எனவும் அனுமானித்துக் கொள்கிறோம். பின்பு மாறிகள் அனைத்திற்கும் ஏலவே அனுமானிக்கப்பட்டதின்படி உரிய பெறுமானத்தைக் கொடுத்தல் வேண்டும். இவ்வாறு செய்கையில் இயைபின்மை ஏற்படுமாயின் தரப்பட்ட வாதம் வலிதானது. இயைபின்மை ஏற்படாதுவிடின் அவ்வாதம் வலி தற்றது.

பின்வரும் உதாரணத்தைக் கவனிக்கவும்.

உதாரணம் (4)

$$\begin{array}{l} B \vee \sim A \\ \sim (C \wedge \sim D) \\ \underline{C \vee B} \\ A \vee D \end{array}$$

நிலை ஒன்று

$$\begin{array}{l} B \underset{T}{\vee} \sim A \\ \underset{T}{\sim} (C \wedge \sim D) \\ \underline{C \underset{T}{\vee} B} \\ A \underset{F}{\vee} D \end{array}$$

எடுகூற்றுக்களிற்கு T எனவும், முடிவு F எனவும் பெறுமானம் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

நிலை இரண்டு

$$\begin{array}{l} B \underset{T}{\vee} \sim A \\ \underset{T}{\sim} (C \wedge \sim D) \\ \underline{C \underset{T}{\vee} B} \\ \underset{F}{A} \underset{F}{\vee} \underset{F}{D} \end{array}$$

(A ∨ D) என்பது F ஆனதால் அதிலடங்கிய A, D என்பன இரண்டும் F ஆகும்.

மூன்றாவது நிலை

$$\begin{array}{l} B \underset{T}{\vee} \sim A \\ \underset{T}{\sim} (C \underset{F}{\wedge} \sim D) \\ \underline{C \underset{T}{\vee} B} \\ \underset{F}{A} \underset{F}{\vee} \underset{F}{D} \end{array}$$

தரப்பட்ட மூன்று எடுகூற்றுக்களிலும் இரண்டாவதில் $\sim (C \wedge \sim D)$ என்பதற்கு T என்ற பெறுமானம் கொடுக்கப்பட்டிருப்பதால் $(C \wedge \sim D)$

என்பதற்கு F என்ற பெறுமானம் கொடுக்கப்படுகிறது. முதலாவதும், மூன்றாவதுமான எடுகூற்றுக்களிற்கு இந்நிலையில் பெறுமானங்கள் கொடுக்கப்படவில்லை. ஏனெனில் உறழ்வு எடுப்புக்கள் மூன்று நிலைகளில் உண்மையாகின்றன என்பதனாலாகும்.

நான்காவது நிலை

```
   B ∨ ~ A
     T
~ (C ∧ ~ D)
T  F   F T
   C ∨ B
     T
   ───────
   A ∨ D
   F F F
```

முடிவில் வருகிற Dக்கு F என்ற பெறுமானம் கொடுக்கப்பட்டிருப்பதனால் ~ Dக்கு T என்ற பெறுமானம் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. ~ D, T ஆயின் C, F என்ற பெறுமானத்தையே ஏற்றல்வேண்டும்.

ஐந்தாவது நிலை

```
   B ∨ ~ A
     T
~ (C ∧ ~ D)
T  F   F T
   C ∨ B
   F T T
   ───────
   A ∨ D
   F F F
```

மூன்றும் எடுகூற்றில் வருகின்ற (C ∨ B)க்கு T என்ற பெறுமானம் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இரண்டாவது எடுகூற்றில் C க்கு F என்ற பெறுமானம் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. எனவே Bக்கு T என்ற பெறுமானம் மட்டுமே கொடுக்கப்படலாம்.

ஆறாவது நிலை

```
   B ∨ ~ A
   T T T
~ (C ∧ ~ D)
T  F   F T
   C ∨ B
   F T T
   ───────
   A ∨ D
   F F F
```

மூன்றாவது எடுகூற்றில் B க்கு T என்ற பெறுமானம் கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது. அதனடிப்படையில் முதலாவது எடுகூற்றில் வருகின்ற Bக்கும் T என்ற பெறுமானமே கொடுபடல்வேண்டும். B ∨ ~ A என்பதற்கு T என்ற பெறுமானத்தை ஏலவே கொடுத்திருப்பதால் ~ A க்கு T என்ற பெறுமானத்தையே கொடுக்கவேண்டி ஏற்படுகிறது.

தரப்பட்ட வாதத்தில் எடுகூற்றுக்களிற்கு T என்ற பெறுமானமும் முடிவிற்கு F என்ற பெறுமானமும் கொடுக்கப்பட்டு, அதனடிப்படையில் எத்தகைய இயைபின்மையும் காணமுடியாதிருப்பதால் மேற்படி வாதம் வலிதற்றது என்பது பெறப்படும்.

உதாரணம் (5)

$$[(x \wedge y) \wedge z] \rightarrow A$$
$$\text{T T T T T T}$$
$$(Z \rightarrow A) \rightarrow (B \rightarrow C)$$
$$\text{T T T T T T F}$$
$$=$$

B
T

$$\frac{\quad}{X \rightarrow C}$$
$$\text{T F F}$$

எடுகூற்றுக்களை T எனவும் முடிவு F எனவும் அனுமானித்து பெறுமானங்கள் கொடுக்கப்பட்டபொழுது இரண்டாவது எடுகூற்றின் பின்னிணை வான (B → C) என்பதில் பெறுமான இயைபின்மை ஏற்படுகிறது. எனவே மேற்கூறிய வாதம் வலிதானதென்பது பெறப்படும்.

2.5. நியம நிருபண முறை அல்லது பெறுகை முறை

உண்மையட்டவணைக்குப் பதிலாக வாதங்களின் வாய்ப்பைத் துணியும் பிறிதொரு முறையே நியம நிருபண முறையாகும். பிரதியீட்டுப் பெறுகை முறை அல்லது இயற்கை உய்த்தறி முறை எனவும் இது அழைக்கப்படுகிறது. நியம நிருபண முறையில் அனுமான விதிகள், வலுச்சமன் விதிகள் என்பனவற்றின் உதவியுடன் எடுகூற்றுக்களிலிருந்து முடிவு அனுமானிக்கப்படுகிறது.

2.5.1. அனுமான விதிகள்

1. M.P. உடன்பட்டு உடன்படல் விதி

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \underline{p} \\ \therefore q \end{array}$$

2. M.T. மறுத்து மறுத்தல் விதி

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \underline{\sim q} \\ \therefore \sim p \end{array}$$

3. H.S. நிபந்தனை நியாயத் தொடை விதி

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \underline{q \rightarrow r} \\ \therefore p \rightarrow r \end{array}$$

4. D. S. உறழ்வு நியாயத் தொடை விதி

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \sim p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

5. C. D. ஆக்கப்பாடுள இருதலைக் கோள் விதி

$$\begin{array}{l} (p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \\ p \vee r \\ \hline \therefore q \vee s \end{array}$$

6. Abs. அடக்க விதி

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \hline \therefore p \rightarrow (p \wedge q) \end{array}$$

7. Sim. எளிமையாக்கல் விதி

$$\begin{array}{l} p \wedge q \\ \hline \therefore p \end{array}$$

8. Conj. இணைப்பு விதி

$$\begin{array}{l} p \\ q \\ \hline \therefore p \wedge q \end{array}$$

9. Add. கூட்டல் விதி

$$\begin{array}{l} p \\ \hline \therefore p \vee q \end{array}$$

2.5.2. பிரதியீட்டு விதிகள்

10. Dem. டி மோர்கன் தோற்றங்கள்

(அ) $\sim (p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$

(ஆ) $\sim (p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$

11. Com. மாற்று விதி

(அ) $(p \vee q) \equiv (q \vee p)$

(ஆ) $(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$

12. Dist. வியாப்தி விதி

(அ) $[p \wedge (q \vee r)] \equiv [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$

(ஆ) $[p \vee (q \wedge r)] \equiv [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$

13. D.N. இரட்டை மறுப்பு விதி

$$p \equiv \sim \sim p$$

14. Assos. தொகுப்பு விதி

(அ) $[p \vee (q \vee r)] \equiv [(p \vee q) \vee r]$

(ஆ) $[p \wedge (q \wedge r)] \equiv [(p \wedge q) \wedge r]$

15. Trans. இடமாற்ற விதி

$(p \rightarrow q) \equiv (\sim q \rightarrow \sim p)$

16. M.I. பொருள் உட்கிடை விதி

$(p \rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$

17. Equiv. பொருட் சமன்பாட்டு விதி

(அ) $(p \longleftrightarrow q) \equiv [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$

(ஆ) $(p \longleftrightarrow q) \equiv [(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)]$

18. Exp. அவநயனம்

$[(p \wedge q) \rightarrow r] \equiv [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$

19. Taut. கூறியது கூறல் விதி

$p \equiv (p \vee p)$

$p \equiv (p \wedge p)$

முக்கிய குறிப்பு :-

1. அனுமான விதிகள் நிருபணத்தில் வரும் ஒருவரியின் முழுப் பகுதிக்கும் பிரயோகிக்கப்படவேண்டும்.
2. பிரதியீட்டு விதிகள் நிருபணத்தின் ஒரு வரிக்கோ அல்லது அவ்வரியின் பகுதிக்கோ பிரயோகிக்கப்படக்கூடியது.

2.5.3. நியம நிருபண முறையில் நேர் பெறுகை முறை

எடுகூற்றுக்களிலிருந்து முடிவு தர்க்கரீதியாகப் பெறப்பட்டுள்ளதென்பதைக் கண்டுகொள்வதற்குப் பயன்படுத்தப்படும் ஒரு முறையே நியம நிருபண முறையாகும். உண்மையட்டவணை மூலம் பரிசோதிக்க முடியாதபடி அதிக மாறிகள் இடம்பெறும் வாதங்களைச் சுருக்கமான முறையில் பரிசோதிப்பதற்கு இம்முறை பயன்படும்.

சாதாரண மொழியில் தரப்படும் வாதமொன்றைக் குறியீட்டு மொழியிலமைத்து நியம நிருபண முறையில் அவ்வாதத்தின் வாய்ப்பை நிறுவலாம்.

உதாரணம் (1)

கள்ளக் கடத்தலைத் தடுத்து நிறுத்தாதுவிடின் கறுப்புப் பணத்தின் நடமாட்டம் அதிகரிக்கும். கறுப்புப் பணத்தின் நடமாட்டம் அதிகரிப்பின் நுகர்வுப் பொருட்களின் விலைகள் அதிகரிக்கும். நுகர்வுப் பொருட்களின் விலைகள் அதிகரிக்கவில்லை. எனவே கள்ளக் கடத்தல் தடுத்து நிறுத்தப்பட்டுள்ளது.

குறியீட்டுத் திட்டம் :-

கள்ளக் கடத்தலைத் தடுத்து நிறுத்தல் – p

கறுப்புப் பணத்தின் நடமாட்டம் அதிகரித்தல் – q

நுகர்வுப் பொருட்களின் விலை அதிகரித்தல் – r

$$\begin{array}{l} \sim p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ \sim r \\ \hline \therefore p \end{array}$$

பெறுகை முறை பின்வருமாறு :-

1.	$\sim p \rightarrow q$	எடுகூற்று
2.	$q \rightarrow r$	எடுகூற்று
3.	$\sim r$	எடுகூற்று | $\therefore p$
4.	$\sim q$	2, 3 மறுத்து மறுத்தல் விதி
5.	$\sim\sim p$	1, 4 மறுத்து மறுத்தல் விதி
6.	p	5 இரட்டை மறுப்பு விதி

மேலே காட்டியபடி; முதலில் எடுகூற்றுக்களை வரிசைப்படுத்தி, அவற்றிற்கெதிரில் எடுகூற்று என எழுதவும். முடிவை இறுதி எடுகூற்றின் வலதுகையில் தனியாக எழுதவும்.

மேற்காட்டிய பெறுகைமுறையில் 1 லிருந்து 3 வரையுள்ளது எடுகூற்றுக்களாகும். நாலாவது வரிசை இரண்டாவதும், மூன்றுவதும் வரிகளிற்கு மறுத்து மறுத்தல் விதியைப் பிரியோகித்ததன்மூலம் பெறப்பட்டது.

$$\begin{array}{l} p \rightarrow r \\ \sim r \\ \hline \sim q \end{array}$$

ஐந்தாவது வரிசை, முதலாவதும், நான்காவதுமான வரிகளிற்கு மறுத்து மறுத்தல் விதியைப் பிரயோகிப்பதன்மூலம் பெறப்பட்டது.

$$\begin{array}{l} \sim p \rightarrow q \\ \sim q \\ \hline \sim\sim p \end{array}$$

ஆறுவது வரிசை ஐந்தாவது வரிக்கு இரட்டை மறுப்பு விதியைப் பிரயோகித்ததின்மூலம் பெறப்பட்டது.

$$\begin{array}{c} \sim\sim p \\ \hline p \end{array}$$

மூன்ருவது வரியின் வலது கோடியில் எழுதப்பட்டிருக்கும் முடிபு நியம ரீதியாக ஆருவது வரிசையில் பெறப்பட்டதால் அத்துடன் பெறுகை முறை முடிவடைந்துவிடுகிறது.

உதாரணம் (2)

$$\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ B \rightarrow C \\ C \rightarrow D \\ \sim D \\ A \vee E \\ \hline \therefore E \end{array}$$

பெறுகை முறை பின்வருமாறு :-

1.	$A \rightarrow B$	எடுகூற்று
2.	$B \rightarrow C$	எடுகூற்று
3.	$C \rightarrow D$	எடுகூற்று
4.	$\sim D$	எடுகூற்று
5.	$A \vee E$	எடுகூற்று $\mid \therefore E$
6.	$A \rightarrow C$	*1, 2* நிபந்தனை நியாயத் தொடை விதி
7.	$A \rightarrow D$	*6, 3* நிபந்தனை நியாயத் தொடை விதி
8.	$\sim A$	*7, 4* மறுத்து மறுத்தல் விதி
9.	E	*5, 8* உறழ்வு நியாயத் தொடை விதி

மேலே தரப்பட்ட வாதத்தில் ஒன்று தொடக்கம் ஐந்து வரையுள்ள வரிகள் எடுகூற்றுக்களாகும். ஆருவது வரி, முதலாவதும் இரண்டாவதும் வரிகளிற்கு நிபந்தனை நியாயத் தொடை விதியைப் பிரயோகித்ததன் மூலம் பெறப்பட்டது.

$$\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ B \rightarrow C \\ \hline A \rightarrow C \end{array}$$

ஏழாவது வரி, ஆருவதும், மூன்ருவதும் வரிகளிற்கு மீண்டும் நிபந்தனை நியாயத்தொடை விதியைப் பிரயோகித்ததன்மூலம் பெறப்பட்டது.

$$\begin{array}{l} A \rightarrow C \\ C \rightarrow D \\ \hline A \rightarrow D \end{array}$$

எட்டாவது வரி, ஏழாவதும் நாலாவதுமான வரிகளிற்கு மறுத்து மறுத்தல் விதியைப் பிரயோகித்ததனுல் பெறப்பட்டதாகும்.

$$\begin{array}{l} A \rightarrow D \\ \sim D \\ \hline \sim A \end{array}$$

ஒன்பதாவது வரி, ஐந்தாவதும் எட்டாவதுமான வரிகளிற்கு உறழ்வு நியாயத்தொடை விதியைப் பிரயோகித்ததன்மூலம் பெறப்பட்டது.

$$\frac{\begin{array}{l} A \vee E \\ \sim A \end{array}}{E}$$

ஐந்தாவது வரியின் வலதுகோடியில் எழுதப்பட்டிருக்கும் முடிபு, நியம ரீதியாக ஒன்பதாவது வரியில் பெறப்பட்டதினுல் உதாரணம் இரண்டிற்கான பெறுகைமுறை அத்துடன் முடிவடைந்துவிடுகிறது.

உதாரணம் (3)

1.	$\sim A \rightarrow (\sim D \rightarrow \sim B)$	எடுகூற்று
2.	$(D \wedge \sim E) \rightarrow C$	எடுகூற்று
3.	$A \rightarrow C$	எடுகூற்று
4.	$\sim C$	எடுகூற்று $\mid \therefore B \rightarrow E$
5.	$\sim A$	3, 4 மறுத்து மறுத்தல் விதி
6.	$\sim D \rightarrow \sim E$	1, 5 உடன்பட்டு உடன்படல் விதி
7.	$\sim (D \wedge \sim E)$	2, 4 மறுத்து மறுத்தல் விதி
8.	$\sim D \vee \sim \sim E$	7, டீமோர்கன் விதி
9.	$\sim D \vee E$	8, டீமோர்கன் விதி
10.	$D \rightarrow E$	9, பொருள் உட்கிடை விதி
11.	$\sim E \rightarrow \sim D$	10, இடமாற்ற விதி
12.	$\sim E \rightarrow \sim B$	11, 6 நிபந்தனை நியாயத் தொடை விதி
13.	$\sim \sim B \rightarrow \sim \sim E$	12, இடமாற்ற விதி
14.	$B \rightarrow E$	13, இரட்டை மறுப்பு விதி

மேலே தரப்பட்ட உதாரணத்தில், முதலாவதிலிருந்து நாலாவது வரையிலுள்ளது எடுகூற்றுக்களாகும். ஐந்தாவதிலிருந்து பதின்நாலாவது வரையிலுள்ளது பிரதியீடுகளைப் பயன்படுத்தி பெறப்பட்ட பெறுகைகளாகும். ஐந்தாவது வரியிலுள்ளது; மூன்ருவதும், நாலாவதுமாய் உள்ள வரிகளில் மறுத்து மறுத்தல் விதி பிரயோகிக்கப்பட்டதினுல் பெறப்பட்டது.

$$\frac{\begin{array}{ll} \text{வரி } 3, & A \rightarrow C \\ \text{வரி } 4, & \sim C \end{array}}{\begin{array}{ll} \text{வரி } 5, & \sim A \end{array}}$$

ஆருவது வரியிலுள்ளது, முதலாவதும் ஐந்தாவதும் வரிகளில் உள்ளவற்றிலிருந்து உடன்பட்டு உடன்படல் விதி மூலம் பெறப்பட்டதாகும்.

$$\frac{\begin{array}{ll} \text{வரி} - 1, & \sim A \rightarrow (\sim D \rightarrow \sim B) \\ \text{வரி} - 5 & \sim A \end{array}}{\begin{array}{ll} \text{வரி} - 6, & \sim D \rightarrow \sim B \end{array}}$$

ஏழாவது வரியிலுள்ளது; இரண்டாவதும், நாலாவதும் எடுகூற்றுக்களிற்கு மறுத்து மறுத்தல் விதி பிரயோகிக்கப்பட்டதால் பெறப்பட்டதாகும்.

மேலே எடுத்துக்காட்டியது போலவே ஏனைய வரிகளும் அனுமான விதிகளினாலோ அல்லது பிரதியீட்டு விதிகளினாலோ பெறப்பட்டதை அவதானிக்கவும்.

இதுவரை பிரிவு 2.5.2 இல் விளக்கப்பட்ட நியம நிரூபண முறையானது நேர்ப்பெறுகை என அழைக்கப்படும். வலிதான வாதம் தரப்பட்டால் மட்டுமே இம்முறையைக் கையாளலாம். ஒரு வாதத்தின் வாய்ப்பின்மையை இத்தகைய முறையினால் நிறுவ முடியாது.

முக்கிய குறிப்பு :-

தரப்பட்ட எடுகூற்றுக்களிலிருந்து அடையவேண்டிய முடிபிற்கு வர முடியாதிருப்பதற்கு வாதம் வலிவற்றதாயிருப்பது மட்டுமல்ல. சில சந்தர்ப்பங்களில் சரியான பிரதியீடுகளைத் தெரிந்தெடுத்துப் பயன்படுத்த முடியாதிருப்பதும் காரணமாகலாம்.

2.5.4. நிபந்தனைப் பெறுகை

நியம நிரூபண முறையில் வாதங்களைப் பரிசோதிக்கும் பிறிதொரு முறை நிபந்தனைப் பெறுகை என அழைக்கப்படும். தரப்பட்ட வாதத்தின் நிரூபிக்கப்படவேண்டிய முடிபு நிபந்தனை எடுப்பு வடிவத்தில் காணப்படுமாயின் நிபந்தனைப் பெறுகை முறை பயன்படுத்தப்படும்.

பின்வரும் உதாரணத்தைக் கவனிக்கவும்.

உதாரணம் (1)

$$\begin{array}{l} (p \rightarrow \sim q) \vee r \\ r \rightarrow s \\ \sim s \\ \hline q \rightarrow \sim p \end{array}$$

பெறுகை முறை :

1.	$(p \rightarrow \sim q) \vee r$	எடுகூற்று
2.	$r \rightarrow s$	எடுகூற்று
3.	$\sim s$	எடுகூற்று $\mid \underline{\therefore q \rightarrow \sim p}$
4.	q	நிபந்தனைப் பெறுகைக்கான எடுகோள்
5.	$\sim r$	2, 3 மறுத்து மறுத்தல் விதி
6.	$r \vee (p \rightarrow \sim q$	1, மாற்று விதி
7.	$p \rightarrow \sim q$	6, 5 உறழ்வு நியாயத் தொடை விதி
8.	$\sim \sim q$	4 இரட்டை மறுப்பு விதி
9.	$\sim p$	7, 8 மறுத்து மறுத்தல் விதி
10.	$q \rightarrow \sim p$	4, 9 நிபந்தனைப் பெறுகை

4வது வரியில் வருகிற q நிபந்தனைப் பெறுகைக்கான எடுகோள் ஆகும். இது தரப்பட்ட வாதத்தின் நிரூபிக்கவேண்டிய முடிபான $q \rightarrow \sim p$ என்பதில் வருகின்ற முன்னெடுப்பாகும். நேர்ப் பெறுகையில் பெறப்படுவது போலவே இங்கும் பெறுகை முறை அமைகிறது.

q என்பதை எடுகோளாகக்கொண்டு $\sim p$ என்பதைப் பெற்றதும் பெறுகை முடிவடைந்து விடுகிறது. நிபந்தனைப் பெறுகைக்கான எடுகோள் வரியையும் அதிலிருந்து பெறப்பட்ட பின்னுறுப்புக்களையும் தொடர்பு படுத்தும் வகையில் கோடொன்றை வரைதல்மூலம் இது காட்டப்படும்.

நிபந்தனைப் பெறுகையில் நிறுவப்படவேண்டிய முடிபானது ஒன்றிற்கு மேற்பட்ட நிபந்தனைகளைப் பெற்றிருக்குமாயின், அவையனைத்தையும் நிபந்தனை எடுகோள்களாகப் பயன்படுத்தவேண்டும்.

உதாரணம் (2)

$$\begin{array}{c} \sim p \vee (q \rightarrow r) \\ \sim q \vee (\sim r \vee s) \\ \hline p \rightarrow (q \rightarrow s) \end{array}$$

பெறுகை முறை :

1.	$\sim p \vee (q \rightarrow r)$	எடுகூற்று
2.	$\sim q \vee (\sim r \vee s$	எடுகூற்று $\mid \therefore p \rightarrow (q \rightarrow s)$
3.	p	பிரதான நி. பெ. எடுகோள்
4.	q	துணை நி. பெ. எடுகோள்
5.	$\sim \sim q$	4, இரட்டை மறுப்பு விதி
6.	$\sim r \vee s$	2, 5 உறழ்வு நியாயத் தொடை விதி
7.	$\sim \sim p$	3 இரட்டை மறுப்பு விதி
8.	$q \rightarrow r$	1, 7 உறழ்வு நியாயத் தொடை விதி
9.	r	8, 4 உடன்பட்டு உடன்படும் விதி
10.	$\sim \sim r$	9 இரட்டை மறுப்பு விதி
11.	s	6, 10 உறழ்வு நியாயத் தொடை விதி
12.	$q \rightarrow s$	4, 11 நிபந்தனைப் பெறுகை
13.	$p \rightarrow (q \rightarrow s)$	3, 12 நிபந்தனைப் பெறுகை

மேலே தரப்பட்ட உதாரணத்தில் 4வதிலிருந்து 11வது வரையிலுள்ள வரிகள் இரண்டாவது எடுகோளுக்குரிய துணைப் பெறுகையாகும். 3வதிலிருந்து 12வது வரையிலுள்ள வரிகள் முதலாவது எடுகோளுக்குரிய பிரதான பெறுகையாகும்.

உதாரணம் (3)

$$\begin{array}{l} (p \vee q) \rightarrow r \\ \underline{(s \vee t) \rightarrow [(u \vee z) \rightarrow p]} \\ \therefore s \rightarrow (u \rightarrow r) \end{array}$$

பெறுகை முறை :

1.	$(p \vee q) \rightarrow r$	எடுகூற்று
2.	$(s \vee t) \rightarrow [(u \vee z) \rightarrow p)]$	எடுகூற்று $\mid \therefore s \rightarrow (u \rightarrow r)$
3.	s	பிரதான நிபந்தனைப் பெறுகைக்கான எடுகோள்
4.	$s \vee t$	3 கூட்டல் விதி
5.	$(u \vee z) \rightarrow p$	2, 4 உடன்பட்டு உடன்படல் விதி
6.	u	துணைப் பெறுகைக்கான எடுகோள்
7.	$(u \vee z)$	6 கூட்டல் விதி
8.	p	5, 7 உடன்பட்டு உடன்படல் விதி
9.	$p \vee q$	8 கூட்டல் விதி
10.	r	1, 9 உடன்பட்டு உடன்படல் விதி
11.	$u \rightarrow v$	6, 10 நிபந்தனைப் பெறுகை
12.	$s \rightarrow (u \rightarrow r)$	3, 11 நிபந்தனைப் பெறுகை

நிபந்தனைப் பெறுகையில் அவதானிக்கப்பட வேண்டியன :

1. முற்றுப் பெற்ற துணைப் பெறுகையில் கோடிடப்பட்ட எந்தவொரு வரியையும் பிரதான பெறுகையில் மீளப் பயன்படுத்தல் ஆகாது.
2. எந்த பெறுகையும் அதன் கீழ் ஆரம்பிக்கப்பட்ட துணைப் பெறுகை முற்றுப் பெறுமல் முடிவடைய மாட்டாது.

முக்கிய குறிப்பு :

எப்பொழுதும் நிபந்தனைப் பெறுகையில் நிறுவப்பட வேண்டிய முடிபின் முன்னெடுப்பை மட்டும் பெறுகைக்கான நிபந்தனை எடுகோளாக எடுக்க வேண்டும் என்பது கட்டாயமில்லை.

பின்வரும் உதாரணத்தைக் கவனிக்கவும்.

உதாரணம் (4)

1.	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	எடுகூற்று
2.	$r \rightarrow (s \wedge t)$	எடுகூற்று $\mid \therefore p \rightarrow (q \rightarrow s)$
3.	$p \wedge q$	நிபந்தனைப் பெறுகைக்கான எடுகோள்
4.	$(p \wedge q) \rightarrow r$	1, அவநயன விதி
5.	r	4, 3 உடன்பட்டு உடன்படல் விதி
6.	$s \wedge t$	2, 5 உடன்பட்டு உடன்படல் விதி
7.	s	6 எளிமையாக்கல் விதி
8.	$(p \wedge q) \rightarrow s$	3, 7 நிபந்தனைப் பெறுகை
9.	$p \rightarrow (q \rightarrow s)$	8, அவநயன விதி

மேலே தரப்பட்ட உதாரணத்தில் நிறுவப்படவேண்டிய முடிபு $p \rightarrow (q \rightarrow s)$ என்பதால், நிபந்தனைப் பெறுகைக்கான எடுகோள் $(p \wedge q)$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது. அவநயன விதிப்படி $p \rightarrow (q \rightarrow s)$ என்பது $(p \wedge s) \rightarrow s$ என வருமாகையால் நிபந்தனைப் பெறுகைக்கான எடுகோளாக $(p \wedge q)$ எடுக்கப்பட்டது.

2.5.5. நேரல் பெறுகை

நேரல் பெறுகையில் நிறுவப்படவேண்டிய முடிவிற்கு முரணானதாயுள்ள தொன்றை அனுமானித்து, அவ்வனுமானம் வெளிப்படையானதொரு முரண்பாட்டைக் காட்டாநாயின் அனுமானிக்கப்பட்டது பொய் என்பது பெறப்படும். அத்துடன் நிறுவப்படவேண்டியது உண்மை என்பதும் பெறப் படும். நேரல்முறையில் நிறுவப்படவேண்டியதின் மறுப்பு மேலதிக எடுகூற்றாக ஏற்றுக்கொள்ளப்படுகிறது. இதன்மூலம் தரப்பட்ட எடுகூற்றுக்களி லிருந்து வெளிப்படையாக முரண்படும் முடிபொன்றினைப் பெறலாம்.

பின்வரும் உதாரணத்தைக் கவனிக்கவும்.

உதாரணம் (1)

1.	$p \vee q$	எடுகூற்று
2.	$p \rightarrow q$	எடுகூற்று $\mid \therefore q$
3.	$\sim q$	நேரல் பெறுகைக்கான எடுகோள்
4.	$\sim p$	2, 3 மறுத்து மறுத்தல் விதி
5.	$q \vee p$	1, மாற்று விதி
6.	p	5, 3 உறழ்வு நியாயத் தொடை விதி
7.	$p \wedge \sim p$	6, 4 இணைப்பு விதி
8.	q	நேரல் பெறுகை

தரப்பட்ட வாதத்தில் 8வது வரி மேலதிகமானதாகக் காணப்பட்ட போழுதும், முழுமை நோக்கி இது பெறுகையில் உள்ளடக்கப்பட்டுள்ளது: $(p \wedge \sim p) \rightarrow q$ என்பது கூறியது கூறல் என்பதனல் 7வது வரியிலேயே வெளிப்படையான முரண்பாடு காணப்படுவதையடுத்து நிறுவப்படவேண்டிய முடிபான q ஏற்புடையதென்பது பெறப்படும். அதாவது 3வது வரியிலுள்ள நேரல் பெறுகைக்கான எடுகோள் ஏற்புடையதல்ல என்பது பெறப்படும்.

உதாரணம் (2)

$$\begin{array}{c} A \rightarrow B \\ A \vee B \\ \hline \therefore B \end{array}$$

1.	$A \rightarrow B$	எடுகூற்று
2.	$A \vee B$	எடுகூற்று $\mid \therefore B$
3.	$\sim B$	முடிவின் மறுப்பு
4.	$B \vee A$	2, மாற்று விதி
5.	A	4, 3 உறழ்வு நியாயத் தொடை விதி
6.	B	1, 5 உடன்பட்டு உடன்படும் விதி

7.	$\sim B \to B$	3, 6 நிபந்தனைப் பெறுகை
8.	$\sim\sim B \vee B$	7 பொருள் உட்கிடை விதி
9.	$B \vee B$	8 இரட்டை மறுப்பு விதி
10.	B	9 கூறியது கூறல் விதி

உதாரணம் (3)

1.	$p \to (q \to r)$	எடுகூற்று
2.	$S \vee (p \vee r)$	எடுகூற்று
3.	$p \to q$	எடுகூற்று $\mid \therefore s \vee r$
4.	$\sim (s \vee r)$	நேரல் பெறுகைக்கான எடுகோள்
5.	$\sim s \wedge \sim r$	4 டிமோர்கன் தேற்றம்
6.	$\sim s$	5 எளிமையாக்கல் விதி
7.	$p \vee r$	2, 6 உறழ்வு நியாயத் தொடை விதி
8.	$(p \wedge q) \to r$	1 அவநயன விதி
9.	$p \to (p \wedge q)$	3 அடக்க விதி
10.	$p \to r$	9, 8 நிபந்தனை நியாயத் தொடை விதி
11.	$\sim r \wedge \sim s$	5 மாற்று விதி
12.	$\sim r$	11 எளிமையாக்கல் விதி
13.	$\sim p$	10, 12 மறுத்து மறுத்தல் விதி
14.	$r \vee p$	7 மாற்று விதி
15.	p	14, 12 உறழ்வு நியாயத் தொடை விதி
16.	$p \wedge \sim p$	15, 13 இணைப்பு விதி
17.	$s \vee r$	நேரல் பெறுகை

முற்கூறிய மூன்று உதாரணங்களிலிருந்தும் நேரல் பெறுகை எவ்வாறு பெறப்படுகின்றது என்பதை விளங்கிக்கொள்ளலாம். தரப்பட்ட வாதத்தின் எடுகூற்றுக்களையும், அவ்வாதத்தின் முடிபின் மறுப்பை எடுகோளாகவும் கொண்டு அனுமானம் செய்யப்படுமிடத்து; பெறப்படும் முடிபு, பெறுகை முறையில் அனுமானிக்கப்படும் நேரல் பெறுகைக்கான எடுகோளுடன் முரண்படும். இம்முரண்பாடு காரணமாக தரப்பட்ட வாதம் வலிதானதென்பது பெறப்படும்.

நிபந்தனைப் பெறுகை, நேரல் பெறுகை என்ற இரு முறைகளும் கூறியது கூறலான எடுப்புக்களை நிறுவுவதற்கு பயன்படக்கூடிய சிறப்பான உபாயங்களாகும்.

உதாரணம் (1)

$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$ என்ற நற்சூத்திரம் ஒரு கூறியது கூறலாகும். இதனைப் பின்வரும் முறையில் பரிசோதிக்கலாம்.

1.	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$	நி. பே. எடுகோள் $\underline{\mid \therefore p \rightarrow r}$
2.	p	நி. பே. எடுகோள் $\underline{\mid \therefore r}$
3.	$p \rightarrow q$	1, எளிமையாக்கல் விதி
4.	q	3, 2 உடன்பட்டு உடன்படல் விதி
5.	$(q \rightarrow r) \wedge (p \rightarrow q)$	1, மாற்று விதி
6.	$q \rightarrow r$	5, எளிமையாக்கல் விதி
7.	r	6, 4 உடன்பட்டு உடன்படல் விதி

உதாரணம் (2)

$$(p \rightarrow q) \rightarrow [p \rightarrow (p \wedge q)]$$

1.	$p \rightarrow q$	நி. பெ; எடுகோள் $\underline{\mid \therefore p \rightarrow (p \wedge q)}$
2.	p	நி. பெ. எடுகோள் $\underline{\mid \therefore p \wedge q}$
3.	q	1, 2 உடன்பட்டு உடன்படல் விதி
4.	$p \wedge q$	2. 3 இணைப்பு விதி

நிபந்தனை வடிவத்தைப் பெறாத கூறியது கூறல் சூத்திரங்களை நிறுவுவதற்கு நேரல் பெறுகை முறை பயன்படுத்தப்படும்.

உதாரணம் (3)

$$p \rightarrow (p \vee q)$$

1.	$\sim [p \rightarrow (p \vee q)]$	நே. பெ. எடுகோள் $\underline{\mid p \rightarrow (p \vee q)}$
2.	$\sim [\sim p \vee (p \vee q]$	1, பொருள் உட்கிடை விதி
3.	$\sim \sim p \wedge \sim (p \vee q)$	2, டிமோர்கன் விதி
4.	$\sim \sim p \wedge (\sim p \wedge \sim q)$	3, டிமோர்கன் விதி
5.	$\sim \sim p$	4, எளிமையாக்கல் விதி
6.	$(\sim p \wedge \sim q) \wedge \sim \sim p$	4, மாற்று விதி
7.	$\sim p \wedge \sim q$	6, எளிமையாக்கல் விதி
8.	$\sim p$	7, எளிமையாக்கல் விதி
9.	$\sim p \wedge \sim \sim p$	8, 5 இணைப்பு விதி

தரப்பட்ட வாதத்தின் முடிபின் மறுப்பை நேரல் பெறுகையில் எடுகோளாகக்கொண்டு பெறுகை முறையை அமைக்கும்பொழுது, பெறப்படும் முடிபு தரப்பட்ட வாதத்தின் முடிபுடன் முரண்படுவதன்மூலம் தரப்பட்டது கூறியது கூறல் என்பது பெறப்படும்.

உதாரணம் (4)

$$(p \wedge q) \rightarrow p$$

1.	$\sim [(p \wedge q) \rightarrow p]$	நே. பெ. எடுகோள் $\underline{\mid \therefore (p \wedge q) \rightarrow p}$
2.	$\sim [\sim (p \wedge q) \vee p]$	1, பொருள் உட்கிடை விதி
3.	$\sim \sim (p \wedge q) \wedge \sim p$	2, டிமோர்கன் தேற்றம்
4.	$(p \wedge q) \wedge \sim p$	3, இரட்டை மறுப்பு விதி
5.	$p \wedge q$	4, எளிமையாக்கல் விதி

6. p	5, எளிமையாக்கல் விதி
7. $\sim p \wedge (p \wedge q)$	4, மாற்று விதி
8. $\sim p$	7, எளிமையாக்கல் விதி
9. $p \wedge \sim p$	6, 8 இணைப்பு விதி

2. 6. வலுச்சமனான உரு மாற்றம்

பிறின்சிபியா மதமற்றிக்கா (Principia Mathematica) என்ற நூலில் ரசலும், வைட்கேட்டும் பின்வரும் வரைவிலக்கணங்களை ஏற்றுக்கொண்டிருந்தனர்.

1. $(p \rightarrow q) = df (\sim p \vee q)$
2. $(p \wedge q) = df \sim (\sim p \vee \sim q)$
3. $(p \leftrightarrow q) = df [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$

குறியீட்டு மொழியில் இரு வேறு வடிவங்களைக் கொண்ட நற்சூத்திரங்களிடையே ஒரேவித உண்மைப் பெறுமானம் காணப்படுமாயின் இரண்டு நற்சூத்திரங்களும் வலுச்சமன் சூத்திரங்கள் எனப்படும். உதாரணமாக $(p \vee q)$ என்பதும் $(q \vee p)$ என்பதும் வலுச்சமனானதென்பது பின்வருமாறு அறியப்படும்.

$p \vee q$		$q \vee p$	
T T T		T T T	
T T F	1, 2, 3/4	F T T	
F T T		T T F	1, 2, 3/4
F F F		F F F	

வலுச்சமனான சூத்திரங்கள் ஒன்றிற்குப் பதிலாக மற்றது பயன்படுத்தப்படலாம். இவ்வகையான பதிலீடுகள் வலுச்சமனான உருமாற்றத்தைத் தரும்.

உதாரணம் (1)

$$(p \rightarrow q) \wedge (p \wedge q) \wedge (p \leftrightarrow q)$$

தரப்பட்ட உதாரணத்தில் வருகின்ற $(p \wedge q)$ என்பதற்குப் பதிலாக $\sim (\sim p \vee \sim q)$ என்பதுவும்; $(p \leftrightarrow q)$ என்பதற்குப் பதிலாக $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$ என்பதுவும் பயன்படுத்திப் பின்வரும் உருமாற்றத்தைப் பெறலாம்.

$$[(p \rightarrow q) \wedge \sim (\sim p \vee \sim q)] \wedge [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$$

2.6.1. பிற வலுச்சமன் விதிகள்

1. (அ) $\sim (p \wedge q) = (\sim p \vee \sim q)$
   (ஆ) $\sim (p \vee q) = (\sim p \wedge \sim q)$

டிமோர்கன் தேற்றங்கள்

2. (அ) $[p \vee (q \wedge r)] = [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$
(ஆ) $[p \wedge (q \vee r)] = [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$

வியாப்தி விதிகள்

3. (அ) $(p \vee q) = (q \vee p)$
(ஆ) $(p \wedge q) = (q \wedge p)$

இடமாற்ற விதிகள்

4. (அ) $[p \vee (q \vee r)] = [(p \vee q) \vee r]$
(ஆ) $[p \wedge (q \wedge r)] = [(p \wedge q) \wedge r]$

தொகுப்பு விதிகள்

5. (அ) $(p \leftrightarrow q) = [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$
(ஆ) $(p \leftrightarrow q) = [(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)]$

பொருட் சமன்பாட்டு விதிகள்

6. (அ) $(p \vee q) = p$
(ஆ) $(p \wedge q) = p$

கூறியது கூறல் விதிகள்

7. $\sim \sim p = p$

இரட்டை மறுப்பு விதி

8. $(p \rightarrow q) = (\sim q \rightarrow \sim p)$

இடமாற்ற விதி

9. $(p \rightarrow q) = (\sim p \vee q)$

பொருள் உட்கிடை விதி

10. $[(p \wedge q) \rightarrow r] = [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$

அவநயன விதி

முக்கிய குறிப்பு

மேலே தரப்பட்ட வரைவிலக்கண விதிகளும், ஏனைய பிற விதிகளும் வலுச் சமனுன உருமாற்றத்திற்குரிய விதிகளாகும்: இவ்விதிகள் தரப்பட்ட சூத்திரத்தின் முழுமைக்கோ அன்றிப் பகுதிக்கோ பிரயோகிக்கப்படலாம்.

2.7. இணைப்பு நியம வடிவம்

C N. F. முறை என இது அழைக்கப்படும், இணைப்பு நியம வடிவத்தில் தரப்படும் நற்சூத்திரம் பின்வருமாறு அமையும். $D_1 \wedge D_2 \wedge D_3 \ldots\ldots D_n$: அதாவது உறழ்வெடுப்புக்களின் இணைப்பாக இது அமைகிறது. D_1, D_2 என்பன உறழ்வெடுப்புக்களையும், $\wedge$ என்பது உறழ்வெடுப்புக்களின் இணைப்பையும் குறிப்பிடுகிறது. ஒரு நற்சூத்திரம் இணைப்பு நியம வடிவத்தில்

தரப்படும்பொழுது மறுப்பு மாறிலி அடைப்புக் குறிகளின் வெளியே இடம் பெறுவது தவிர்க்கப்படுதல் வேண்டும். எனினும் தனியொரு மாறி மறுப்பு மாறிலியைக் கொண்டிருக்கலாம். தரப்பட்டதொரு நற்சூத்திரத்தை இணைப்பு நியம வடிவமாக உருமாற்றம் செய்வதன்மூலம் அவ்வாதத்தின் வாய்ப்பைத் தீர்மானிக்கலாம்.

நற்சூத்திரமொன்றை இணைப்பு நியம வடிவமாக உருமாற்றம் செய்வதற்குப் பின்வரும் விதிகள் பயன்படுத்தப்படுகின்றன.

1. வரைவிலக்கண விதிகள்

(அ) $(p \rightarrow q) = (\sim p \vee q)$

(ஆ) $(p \wedge q) = \sim(\sim p \vee \sim q)$

(இ) $(p \leftrightarrow q) = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

உறழ்வு, மறுப்பு மாறிலிகள் அல்லாத பிற மாறிலிகள் இடம்பெறும் நற்சூத்திரங்களை மறுப்பு, உறழ்வு என்ற மாறிலிகளை மாத்திரம் உள்ளடக்கியதாக உருமாற்றம் செய்வதற்கு வரைவிலக்கண விதிகள் பயன்படுத்தப்படும்.

2. இரட்டை மறுப்பு

$p = \sim \sim p$

3. டிமோர்கன் விதி

(அ) $\sim(p \wedge q) = (\sim p \vee \sim q)$

(ஆ) $\sim(p \vee q) = (\sim p \wedge \sim q)$

மேலே தரப்பட்ட இரு விதிகளும் இணைப்பு நியம வடிவத்தில் மறுப்பு மாறிலி அடைப்புக்குறிக்கு வெளியே இடம்பெறுவதைத் தவிர்ப்பதற்குப் பயன்படுத்தப்படும். இணைப்பு நியம வடிவத்தில் $(\sim p \vee \sim q)$ என்பது அனுமதிக்கப்படும். ஆனால் $\sim(p \vee q)$ என்பது அனுமதிக்கப்படமாட்டாது.

4. கூறியது கூறல் விதி

$p = (p \vee p)$

$p = (p \wedge p)$

இணைப்பு நியம வடிவத்தில் $(p \vee p)$ என்பதோ அன்றி $(p \wedge p)$ என்பதோ இடம்பெறுதல் தவிர்க்கப்படல்வேண்டும். அதற்குப் பதிலாக p என்பது பயன்படுத்தப்படல் வேண்டும்.

5. வியாப்தி விதி

(அ) $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

(ஆ) $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

இணைப்பு நியம வடிவத்தில் "$\wedge$" இணைப்பு மாறிலி அடைப்புக்குறிகளிற்குள் இடம்பெறுதல் ஆகாது. ஆனால் இரு அடைப்புக்குறிகளை இணைப்பதற்கு அது பயன்படுத்தப்படலாம். அடைப்புக்குறியினுள் இணைப்பு இடம் பெறுவதைத் தவிர்ப்பதற்காக வியாப்தி விதி பயன்படுத்தப்படுகிறது.

6. தொகுப்பு விதி

(அ) $p \vee (p \vee r) = (p \vee q) \vee r$

(ஆ) $p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r$

7. மாற்று விதி

(அ) $(p \vee q) = (q \vee p)$

(ஆ) $(p \wedge q) = (q \wedge p)$

மேற்கூறிய இரு விதிகளும் C.N.F. முறையை தராதரமுடைய ஒழுங்கின் கீழ்க் கொண்டுவர உதவுகிறது.

உதாரணம் (1)

$$[(p \vee q) \wedge \sim p] \rightarrow q$$

நிலை	1	$\sim[(p \vee q) \wedge \sim p] \vee q$	வரைவிலக்கண விதிப்படி
நிலை	2	$[\sim(p \vee q) \vee \sim\sim p] \vee q$	முதலாவது டீ மோர்கன் விதிப்படி
நிலை	3	$[\sim(p \vee q) \vee p] \vee q$	இரட்டை மறுப்பு விதிப்படி
நிலை	4	$[(\sim p \wedge \sim q) \vee p] \vee q$	இரண்டாவது டீ மோர்கன் விதிப்படி
நிலை	5	$[p \vee (\sim p \wedge \sim q)] \vee q$	முதலாவது மாற்று விதிப்படி
நிலை	6	$[(p \vee \sim p) \wedge (p \vee \sim q)]$	முதலாவது வியாப்தி விதிப்படி
நிலை	7	$q \vee [(p \vee \sim p) \wedge (p \vee \sim q)]$	இரண்டாவது மாற்று விதிப்படி
நிலை	8	$[q \vee (p \vee \sim p)] \wedge [q \vee (p \vee \sim q)]$	முதலாவது வியாப்தி விதிப்படி
நிலை	9	$[(p \vee \sim p) \vee q] \wedge [(p \vee \sim q) \vee q]$	முதலாவது மாற்று விதிப்படி
நிலை	10	$[(p \vee \sim p) \vee q] \wedge [p \vee (\sim q \vee q)]$	முதலாவது தொகுப்பு விதிப்படி
நிலை	11	$[(p \vee \sim p) \vee q] \wedge [(\sim q \vee q) \vee p]$	முதலாவது மாற்று விதிப்படி
நிலை	12	$[(p \vee \sim p) \vee q] \wedge [(q \vee \sim q) \vee p]$	முதலாவது மாற்று விதிப்படி

தரப்பட்ட எந்தவொரு நற்சூத்திரமும் இணைப்பு நியம வடிவத்திற்கு உருமாற்றம் செய்யப்படும்பொழுது அது ஒரு கூறியது கூறலான சூத்திரமாக வருதல் வேண்டும். இணைப்பு நியம வடிவத்தில் பெறப்படும் கூறியது கூறலான நற்சூத்திரங்கள் எப்பொழுதும் வலிதானதாயிருக்கும்.

உதாரணம் (2)

$$(p \rightarrow q) \rightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$$

நிலை	1	$\sim(\sim p \vee q) \vee (\sim\sim q \vee \sim p)$
நிலை	2	$(\sim\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim\sim q \vee \sim p)$
நிலை	3	$(p \wedge \sim q) \vee (q \vee \sim p)$
நிலை	4	$(q \vee \sim p) \vee (p \wedge \sim q)$

நிலை 5 $[(q \vee \sim p) \vee p] \wedge [(q \vee \sim p) \vee \sim q]$
நிலை 6 $[q \vee (\sim p \vee p)] \wedge [\sim q \vee (q \vee \sim p)]$
nிலை 7 $[(\sim p \vee p) \vee q] \wedge [(\sim q \vee q) \vee \sim p]$
நிலை 8 $[(p \vee \sim p) \vee q] \wedge [(q \vee \sim q) \vee \sim p]$

கூறியது கூறல் அல்லாத அல்லது வாய்ப்பற்ற நற்சூத்திரத்தை எவ்வாறு இணைப்பு நியம முறைமூலம் கண்டுபிடிப்பதென்பதற்குப் பின்வரும் உதாரணத்தைக் கவனிக்கவும்.

உதாரணம் (3)

$$(p \rightarrow q) \rightarrow (\sim p \rightarrow \sim q)$$

நிலை 1 $\sim (\sim p \vee q) \vee (\sim \sim p \vee \sim q)$
நிலை 2 $(\sim \sim p \wedge \sim q) \vee (p \vee \sim q)$
நிலை 3 $(p \wedge \sim q) \vee (p \vee \sim q)$
நிலை 4 $(p \vee \sim q) \vee (p \wedge \sim q)$
நிலை 5 $[(p \vee \sim q) \vee p] \wedge [(p \vee \sim q) \vee \sim q]$
நிலை 6 $[p \vee (p \vee \sim q)] \wedge [p \vee (\sim q \vee \sim q)]$
நிலை 7 $[(p \vee p) \vee \sim q] \wedge (p \vee \sim q)$
நிலை 8 $(p \vee \sim q) \wedge (p \vee \sim q)$
நிலை 9 $(p \vee \sim q)$

பெறப்பட்ட இணைப்பு நியம சூத்திரம் கூறியது கூறல் அல்ல. எனவே தரப்பட்ட நற்சூத்திரமும் கூறியது கூறல் அல்லாததாகவே இருத்தல் வேண்டும்.